SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Ermanno Lanconelli

UN TEOREMA DI IMMERSIONE PER CAMPI VETTORIALI NON LIPSCHITZIANI

29 aprile 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Sunto. Presentiamo un teorema di immersione, nello spazio di Sobolev classico di ordine frazionario $s = \frac{1}{2}$, dello spazio di Sobolev del primo ordine relativo ad una coppia di campi vettoriali non localmente lipschitziani in $\mathbb{R}^3$.

Abstract. We show the following embedding

$$H^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^3) \subset W^{1,2}(X_1, X_2)$$

where $H^{\frac{1}{2},2}$ denotes the classical Sobolev space of order $s = \frac{1}{2}$. $W^{1,2}(X_1, X_2)$ stands for the generalized Sobolev space of order 1 related to the pair of vector fields X_1, X_2. We assume $X_j = \partial_{x_j} + a_j \partial_{x_3}$, $a_j \in H^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ and $q := X_1 a_2 - X_2 a_1$ bounded from above and bounded away from zero.

UN TEOREMA DI IMMERSIONE PER CAMPI VETTORIALI NON LIPSCHITZIANI

E. LANCONELLI

Risultati ottenuti in collaborazione con A. Montanari

1. Introduzione. Nello studio delle proprietà di regolarità delle soluzioni viscose dell'equazione della curvatura di Levi, si presenta il problema dell'immersione, in opportuni spazi L^p, degli spazi di Sobolev (generalizzati) di ordine 1 relativi a campi vettoriali con coefficienti "poco" regolari. Data una funzione u di classe C^2 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, la curvatura di Levi del grafico di u è il seguente numero reale

$$k = \frac{(1+(\partial_{x_3}u)^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+a_1^2+a_2^2)^{\frac{3}{2}}}(X_1^2u + X_2^2u), \tag{1.1}$$

ove le funzioni a_1 e a_2 dipendono dal gradiente di u nel modo seguente

$$a_1 = a_1(Du) = \frac{\partial_{x_2}u - \partial_{x_1}u\partial_{x_3}u}{1+(\partial_{x_3}u)^2}, \quad a_2 = a_2(Du) = -\frac{\partial_{x_1}u + \partial_{x_2}u\partial_{x_3}u}{1+(\partial_{x_3}u)^2}. \tag{1.2}$$

Per $j = 1, 2$, X_j è l'operatore differenziale lineare del primo ordine

$$X_j = \partial_{x_j} + a_j\partial_{x_3} \tag{1.3}$$

L'osservazione che la curvatura di Levi si può scrivere come in (1.1) è contenuta in [Cit98]. A causa della (1.1), assegnata una funzione reale k su $\Omega \times \mathbb{R}$,

$$X_1^2 u + X_2^2 u = k \frac{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + (\partial_{x_3} u)^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1.4}$$

viene chiamata *equazione della curvatura di Levi assegnata* k sull'aperto Ω. Il primo membro di (1.4) è un operatore del secondo ordine quasilineare, con forma caratteristica

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, Du; \xi) &:= \langle X_1, \xi \rangle^2 + \langle X_2, \xi \rangle^2 \\ &= (\xi_1 + a_1(Du)\xi_3)^2 + (\xi_2 + a_2(Du)\xi_3)^2. \end{aligned}$$

Ovviamente $\mathcal{A}(x, Du; \xi) \geq 0$ per ogni $(x, Du; \xi)$ e $\mathcal{A}(x, Du; \xi) = 0$ quando $\xi = (-a_1, -a_2, 1)$. L'operatore al primo membro di (1.4) è quindi quasilineare ellittico degenere, e non è ellittico in ogni punto $(x, D(u))$. Lo studio della regolarità delle soluzioni viscose di (1.4), non si può quindi condurre con le tecniche introdotte in questi ultimi anni da Krylov, Evans, Trudinger, Caffarelli e Cabrè per le equazioni ellittiche non lineari (si veda [CC95]). L'equazione (1.4) è stata studiata recentemente da Citti e Montanari. Esse hanno introdotto un nuovo metodo iterativo che consente di ottenere notevoli risultati di regolarità . Questo metodo, nel caso in cui la curvatura k sia diversa da zero in ogni punto e di classe C^∞, permette di dimostrare la regolarità C^∞ delle soluzioni viscose lipschitziane [CLM99]. La tecnica utilizzata in questo lavoro richiede la seguente disuguaglianza di immersione

$$\|f\|_3 \leq C(\sum_{j=1}^{2} \|X_j f\|_2 + \|f\|_2). \tag{1.5}$$

ove X_j è l'operatore definito in (1.3) col coefficiente a_j dato da (1.2) e calcolato su una funzione $u \in Lip_{loc}(\Omega)$ soluzione viscosa di (1.4). Nello schema iterativo in [CLM99] la disuguaglianza (1.5) viene utilizzata quando già è nota la seguente proprietà di regolarità dei coefficienti a_1 e a_2:

$$a_j \in H^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad j = 1, 2. \tag{1.6}$$

Inoltre, essendo formalmente

$$[X_1, X_2] = q\partial_{x_3}$$

con

$$q = -k\frac{(1+a_1^2+a_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+(\partial_{x_3}u)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

se $u \in Lip_{loc}(\Omega)$ e $\inf k > 0$ allora

$$q, \frac{1}{q} \in L^\infty_{loc}(\Omega),$$

$X_j(q) \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ e, di conseguenza,

$$X_j(q) \in L^6_{loc}(\Omega), \quad j = 1, 2.$$

Queste condizioni, insieme con la (1.6), implicano la disuguaglianza di immersione (1.5). Essa deriva, come vedremo fra breve, da un corollario del seguente teorema, principale risultato di questa nota.

TEOREMA 1.1. *Consideriamo in* $\mathbb{R}^3$ *gli operatori differenziali*

$$X_j = \partial_{x_j} + a_j\partial_{x_3}, \quad j = 1, 2, \tag{1.7}$$

dove a_1, a_2 *appartengono al classico spazio di Sobolev* $H^{2,2}(\mathbb{R}^3)$. *Definiamo*

$$q := X_1a_2 - X_2a_1 \tag{1.8}$$

e supponiamo

$$q, \frac{1}{q} \in L^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{1.9}$$

Allora esiste una costante positiva C, *dipendente soltanto da*

$$M := \sum_{j=1}^{2}(\|a_j\|_{2,2} + \|X_j(q)\|_6) + \|q\|_\infty + \|\frac{1}{q}\|_\infty, \tag{1.10}$$

tale che

$$\|f\|_{1/2,2} \le C\Big(\|f\|_2 + \sum_{j=1}^{2}\|X_jf\|_2\Big) \tag{1.11}$$

per ogni $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Nota. Se q è la funzione in (1.8) allora, come si riconosce immediatamente, $[X_1, X_2] = q\partial_{x_3}$.

Dimostreremo il Teorema 1.1 nel paragrafo 3. Diamo subito, invece, la dimostrazione del corollario seguente.

COROLLARIO 1.1. *Nelle ipotesi del Teorema 1.1 vale la disuguaglianza (1.5) con una costante C dipendente solo dalla quantità M in (1.10).*

Dimostrazione. Segue dalla (1.11) e dalla immersione classica

$$H^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3).$$

Sul Teorema 1.1 e sul Corollario 1.2 sono necessari alcuni commenti.

(i) Quando i coefficienti a_1 e a_2 sono di classe C^∞ la disuguaglianza (1.11), con una costante C dipendente "genericamente" dalle derivate di a_1 e a_2, è conseguenza della seguente stima

$$\|[X_1, X_2]f\|_{-\frac{1}{2},2} \leq C(\sum_{j=1}^{2} \|X_j f\|_2 + \|f\|_2) \tag{1.12}$$

che si può trovare nella monografia [OR73]. Dalla (1.12), essendo

$$[X_1, X_2]f = q\partial_{x_3} f,$$

se $q \geq$ *costante* > 0 si ricava infatti

$$\|\partial_{x_3} f\|_{-\frac{1}{2},2} \leq C(\sum_{j=1}^{2} \|X_j f\|_2 + \|f\|_2) \tag{1.13}$$

D'altra parte $\partial_{x_j} = X_j - a_j\partial_{x_3}$. Quindi, per $j = 1, 2$,

$$\|\partial_{x_j} f\|_{-\frac{1}{2},2} \leq C(\|X_j f\|_{-\frac{1}{2},2} + \|a_j\partial_{x_3} f\|_2) \leq C(\sum_{j=1}^{2} \|X_j f\|_2 + \|f\|_2)$$

Da questa e da (1.13) si ottiene

$$\|f\|_{\frac{1}{2},2} \leq C_1(\sum_{j=1}^{2} \|X_j f\|_2 + \|f\|_2)$$

con C_1 dipendente soltanto dalle a_j e dalle loro derivate. Questa generica dipendenza non consente l'applicazione di (1.11) a procedimenti di regolarizzazione delle soluzioni viscose di equazioni non lineari di tipo curvatura di Levi.

In particolare non è utilizzabile nello schema iterativo di Citti-Montanari. La novità essenziale del Teorema 1.1 sta nel precisare la dipendenza della costante C in (1.11) dalla sola quantità M in (1.10).

(*ii*) Se i coefficienti a_1 e a_2 sono di classe C^1 e se la funzione q in (1.8) è limitata e lontana da zero, allora vale la seguente disuguaglianza di tipo Poincarè

$$\int_B |f - f_B| dx \leq C_2 r |B| \int_{\lambda B} (|X_1 f| + |X_2 f|) dx \tag{1.14}$$

ove $B = B(x_0, r)$ è un disco della metrica di controllo generata da X_1 e X_2, λ è una costante maggiore di 1 indipendente da f e da B, C dipende dalle norme C^1 dei coefficienti a_1 e a_2, λB indica il disco $B(x_0, \lambda r)$. Questo risultato è contenuto in [LM98]. In questa stessa nota è anche dimostrata la seguente stima della misura di Lebesgue di $B = B(x_0, r)$:

$$\frac{1}{\mu} r^4 \leq |B| \leq \mu r^4. \tag{1.15}$$

Anche la costante μ dipende solo dalle norme C^1 dei coefficienti a_1 e a_2.

Risultati ormai ben noti di Saloff-Coste, Biroli & Mosco, Franchi & Serapioni & Serra Cassano, Garofalo & Nieu, assicurano che la disuguaglianza (1.14) e la stima (1.15) implicano la seguente disuguaglianza di tipo Sobolev:

$$\|f\|_4 \leq C_2 \sum_{j=1}^{2} \|X_j f\|_2 \tag{1.16}$$

con C_2 dipendente solo dalle costanti in (1.14) e (1.15), e quindi dipendente, in definitiva, dalle norme C^1 dei coefficienti a_1 e a_2. Non ci è ancora chiaro se (1.16) possa valere nella sola ipotesi di $a_j \in H^{2,2}$. Dalla (1.16), ovviamente, si ricava

$$\|f\|_3 \leq C_3 \sum_{j=1}^{2} \|X_j f\|_2$$

che, in apparenza, migliora la (1.5). Tuttavia, la dipendenza di C_3 dalle norme C^1 dei coefficienti a_j, la rende inutilizzabile nel procedimento iterativo più volte menzionato di sopra.

La presente nota è organizzata nel modo seguente. Nel successivo paragrafo 2 dimostreremo un teorema sul commutatore fra un operatore di

moltiplicazione e un operatore di Calderon–Zygmund. Nel paragrafo 3 dimostreremo il Teorema 1.1.

Avvertenza. I risultati di questa nota, insieme con una naturale estensione del Teorema 1.1 ad una n-upla di campi vettoriali *di passo 2*, appariranno negli atti di un convegno in memoria di Filippo Chiarenza tenutosi a Catania nel novembre '98.

2. Un teorema sul commutatore. Sia $m \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$|D^\alpha m(\xi)| \leq c_\alpha |\xi|^{-|\alpha|} \tag{2.1}$$

per ogni multi-indice α. Denotiamo con T l'operatore di convoluzione relativo a

$$K = \mathcal{F}^{-1}(m):$$

$$T : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}', \quad Tv = K * v.$$

Dalla condizione (2.1) segue che $m \in L^\infty$, $K \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e

$$|D^\alpha K(x)| \leq c'_\alpha |x|^{-N-|\alpha|} \tag{2.2}$$

per ogni multi-indice α ([Ste93, p. 26]). Allora K è un nucleo di Calderon–Zygmund e T è un operatore lineare e continuo di $L^r(\mathbb{R}^N)$ in sè per ogni $r \in]1, \infty[$. Data una funzione regolare $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, consideriamo il commutatore

$$[a, T]v := a(Tv) - T(av).$$

Il nostro principale risultato è il seguente teorema.

TEOREMA 2.1. *Siano $1 < p < \infty$ e $1 < q < N$ tali che $\frac{1}{N} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Definiamo*

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{N}. \tag{2.3}$$

Allora, per ogni funzione $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\|D[a, T]v\|_r \leq c\|D^2 a\|_q \|v\|_p, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.4}$$

dove c è una costante positiva indipendente da a e da v. In (2.4) D indica il gradiente in $\mathbb{R}^N$ mentre $D^2 a$ indica la matrice hessiana di a.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che per ogni funzione $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$([a, T]v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x - y)(a(x) - a(y))v(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Allora, scelta una funzione $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\eta(x) = 0$ se $|x| < \frac{1}{2}$ e $\eta(x) = 1$ se $|x| > 1$,

$$[a,T]v = \lim_{\epsilon \to 0} R_\epsilon v \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),$$

dove

$$(R_\epsilon v)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)\eta\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)(a(x)-a(y))v(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Di conseguenza

$$D[a,T]v = \lim_{\epsilon \to 0} DR_\epsilon v \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Calcolando il gradiente di $R_\epsilon v$ si ottiene

$$\begin{aligned}(DR_\epsilon v)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} DK(x-y)\eta\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)(a(x)-a(y))v(y)dy \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)(D\eta)\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)(a(x)-a(y))v(y)dy \\ &\quad + (Da)(x)\int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)\eta\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)v(y)dy \\ &= (R_\epsilon^{(1)}v + R_\epsilon^{(2)}v + R_\epsilon^{(3)}v)(x).\end{aligned}$$

Dalla teoria degli integrali singolari di Calderon–Zygmund segue che, per $\epsilon \to 0$, $K\eta_\epsilon * v$ converge in $L^p(\mathbb{R}^N)$ alla funzione w tale che

$$\|w\|_p \le c\|v\|_p \tag{2.5}$$

dove c è una costante positiva dipendente solo da K e p. Allora, per $\epsilon \to 0$, $R_\epsilon^{(3)}v$ converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a

$$R^{(3)}v := Da \cdot w.$$

Inoltre, grazie a (2.4) e (2.3),

$$\|R^{(3)}v\|_r \le c\|Da\|_{\frac{Nq}{N-q}}\|v\|_p \le c\|D^2a\|_q\|v\|_p$$

(per il classico Teorema di Sobolev)

Qui e nel seguito denoteremo sempre con c una costante positiva indipendente da a e v. Studiamo ora il comportamento di $R_\epsilon^{(2)}v$. Un cambio di variabile dà

$$R_\epsilon^{(2)}v(x) = \epsilon^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} K(\epsilon z)(D\eta)(z)(a(x)-a(x-\epsilon z))v(x-\epsilon z)dz.$$

Per ϵ che tende a zero la funzione $(x,z) \longmapsto \epsilon^{-1}(a(x)-a(x-\epsilon z))$ converge a $(x,z) \longmapsto \langle Da(x), z\rangle$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Inoltre, per la stima (2.2),

$$|\epsilon^N D(K(\epsilon z)| \leq \frac{c}{|x|^N},$$

e

$$|\epsilon^N D(K(\epsilon z))| = \epsilon^{N+1}|(DK)(\epsilon z)| \leq \frac{c_1}{|x|^N},$$

dove c e c_1 sono indipendenti da ϵ. Allora, su ogni fissato compatto $K \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\{z \mapsto \epsilon^N K(\epsilon z),\ \epsilon > 0\}$ è una famiglia di funzioni equilimitate e equicontinue. Di conseguenza, prendendo una sottosuccessione, se necessario, $\epsilon_j \downarrow 0$ $K_\epsilon(z) := \epsilon^N K(\epsilon z)$ converge puntualmente in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ a una funzione continua K_0. Inoltre, la convergenza di K_ϵ a K_0 è uniforme su ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$. Allora, poichè $D\eta$ ha supporto compatto,

$$\lim_{\epsilon\to 0} R_\epsilon^{(2)} v(x) = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} K_0(z) D\eta(z)\langle Da(x), z\rangle dz\Big) v(x) =: R^{(2)} v(x)$$

uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{R}^N$. Poichè

$$|R^{(2)} v| \leq c|Da|\,|v|,$$

si ottiene

$$\|R^{(2)} v\|_r \leq c\|Da\|_{\frac{Nq}{N-q}} \|v\|_p \leq c\|D^2 a\|_q \|v\|_p. \tag{2.6}$$

Stimiamo ora $R_\epsilon^{(1)}$, la parte cruciale di DR_ϵ. Anzitutto, usiamo la formula di Taylor per scrivere

$$a(x) - a(y) = \langle Da(y), x-y\rangle + \int_0^1 (1-t)\langle D^2 a(yt(x-y)(x-y), x-y\rangle dt.$$

Allora, denotando con ∂_j e ∂_{ij} le derivate $\frac{\partial}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, rispettivamente, abbiamo

$$\begin{aligned} R_\epsilon^{(1)} v(x) = &\int_{\mathbb{R}^N} DK(x-y)\langle Da(y), x-y\rangle \eta\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big) v(y) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} DK(x-y)\eta\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big) v(y) \Big(\int_0^1 (1-t)\langle D^2 a(y)(x-y), x-y\rangle dt\Big) dy \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} DK(x-y)(x_j-y_j)\eta\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)\partial_j a(y)v(y)dy$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^1 (1-t)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} DK(x-y)(x_i-y_i) \cdot$$

$$(x_j-y_j)\eta\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big)\partial_{i,j}a(y+t(x-y))v(y)dy\Big)dt.$$

I nuclei

$$K_{h,j}(z) := \partial_h K(z) z_j, \quad h,j = 1,\cdots,N,$$

sono di tipo Calderon–Zygmund poichè

$$K_{h,j} = \mathcal{F}^{-1}(m_{h,j}),$$

essendo

$$m_{h,j}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\xi_h m(\xi))$$

funzioni C^∞ che soddisfano la condizione

$$|D^\alpha m_{h,j}(\xi)| \leq c_\alpha |\xi|^{-\alpha}$$

per ogni multi-indice α. Allora, per $\epsilon \to 0$, la prima somma al secondo membro (2.7) converge a

$$\sum_{j=1}^{N} R^{(1,j)}(\partial_j a v),$$

dove $R^{(1,j)}$ è un operatore lineare e continuo in $L^r(\mathbb{R}^N)$. Di conseguenza

$$\|\sum_{j=1}^{N} R^{(1,j)}(\partial_j a v)\|_r \leq c\|(Da)v\|_r \leq c\|Da\|_{\frac{Nq}{N-q}}\|v\|_p \leq c\|D^2 a\|_q \|v\|_p.$$

Rimangono da stimare gli integrali nella seconda sommatoria al secondo membro di (2.7). I nuclei

$$K_{i,h,j}(z) := \partial_h K(z) z_i z_j$$

che appaiono in quegli integrali soddisfano le stime

$$|K_{h,i,j}(z)| \leq c|z|^{-N+1}.$$

Infatti, ricordando che $|K_{h,j}(z)| \leq c|z|^{-N}$ e che $K_{h,j}$ è un nucleo di Calderon–Zigmund ,

$$|K_{h,i,j}(z)| = |z_i||K_{h,j}(z)| \leq c|z|^{-N+1}.$$

La seconda sommatoria al secondo membro di (2.7) si può stimare con una costante positiva, indipendente da ϵ, e moltiplicata dalla funzione

$$w(x) = \int_0^1 (1-t) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |v(y)||D^2 a(y + t(x-y))| dy dt.$$

Definiamo

$$s = 1 + \frac{p}{q}, \quad \text{e} \quad s' = 1 + \frac{q}{p}.$$

Poichè

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{1+p/q} + \frac{1}{1+q/p} = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} = 1,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} w(x) \leq & \int_0^1 (1-t) \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |v(y)|^s dy \Big)^{\frac{1}{s}} \cdot \\ & \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |D^2 a(y + t(x-y))|^{s'} dy \Big)^{\frac{1}{s'}} dt \\ & \text{(ponendo } y + t(x-y) = z \text{ nell'ultimo integrale)} \\ = & \int_0^1 (1-t) \Big(I(|v(y)|^s)(x) \Big)^{\frac{1}{s}} \Big(I(|D^2 a|^{s'})(x) \Big)^{\frac{1}{s'}} (1-t)^{-N/s' + (N-1)/s'} dt \\ = & \int_0^1 (1-t)^{1-\frac{1}{s'}} dt \Big(I(|v(y)|^s)(x) \Big)^{\frac{1}{s}} \Big(I(|D^2 a|^{s'})(x) \Big)^{\frac{1}{s'}}, \end{aligned}$$

dove

$$If(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{-N+1} f(y) dy.$$

Ricordando che I è un operatore continuo da $L^m(\mathbb{R}^N)$ a $L^{m*}(\mathbb{R}^N)$ con $\frac{1}{m*} = \frac{1}{m} - \frac{1}{N}$ per ogni $1 < m < N$, risulta

$$\|I(|v|^s)\|_r \leq c \Big(\int |v|^{sp/s} dx \Big)^{\frac{s}{p}} = c\|v\|_p^{\frac{s}{p}},$$

poichè

$$\frac{1}{r} = \frac{s}{p} - \frac{1}{N}.$$

Analogamente

$$\|I(|D^2a|^{s'})\|_r \leq c\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |D^2a(x)|^{s'q/s'}\Big)^{\frac{s'}{q}} = c\|D^2a\|_q^{\frac{s'}{q}}$$

poichè

$$\frac{1}{r} = \frac{s'}{q} - \frac{1}{N}.$$

Di conseguenza, essendo

$$\begin{aligned}\|w\|_r^r &\leq c\int_{\mathbb{R}^N} (I(|v|^S)^{\frac{r}{s}}(I(|D^2a|^{S'})^{\frac{r}{s'}}\,dx \\ &\leq c\|T(|v|^S\|_r^{r/s}\|T(|D^2a|^{S'}\|_r^{r/s'},\end{aligned}$$

otteniamo finalmente

$$\|w\|_r \leq c\|v\|_p\|D^2a\|_q.$$

Questo completa la dimostrazione del teorema.

COROLLARIO 2.1. *Supponiamo siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.1. Allora, per ogni* $j \in \{1, \cdots, N\}$,

$$\|[a\partial_j, T]v\|_r \leq c\|a\|_{2,q}\|v\|_p.$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che

$$\begin{aligned}[a\partial_j, T]v &= a\partial_j(Tv) - (T(a\partial_j v)) \\ &= \partial_j(aTv) - \partial_j(a)Tv - T(\partial_j(av)) + T((\partial_j a)v) \\ &\qquad ([T, p_j] = 0) \\ &= \partial_j(aTv) - T(av)) + [T, \partial_j a]v \\ &= \partial_j[a, T]v - [T, \partial_j a]v.\end{aligned}$$

Dal Teorema 1.1 si ottiene

$$\|\partial_j[a, T]v\|_r \leq C\|D^2a\|_q\|v\|_p.$$

D'altra parte, poichè T è un operatore di Calderon–Zigmund,

$$\begin{aligned}\|[T, \partial_j a]v\|_r &\leq \|T((\partial_j a)v)\|_r + \|(\partial_j a)Tv\|_r \\ &\leq C\|(\partial_j a)v\|_r + \|\partial_j a\|_{\frac{Nq}{N-q}}\|Tv\|_p \\ &\leq C\|\partial_j a\|_{\frac{Nq}{N-q}}\|v\|_p \leq C\|a\|_{q,2}\|v\|_p.\end{aligned}$$

3. Il Teorema di immersione. Scopo di questo paragrafo è la dimostrazione del Teorema 2.1 Osserviamo dapprima che la norma in $H^{\frac{1}{2},2}$ di una funzione reale $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ è equivalente a

$$||f||_2 + \sum_{j=1}^{3} ||\mathcal{F}^{-1}(J\mathcal{F}(\partial_j f))||_2$$

dove

$$J(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{4}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

D'altra parte, definendo

$$m_j(\xi) := \xi_j J^2(\xi) = \frac{\xi_j}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.1}$$

per l'identità di Parseval,

$$\begin{aligned}
||\mathcal{F}^{-1}(J\mathcal{F}(\partial_j f))||_2^2 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^3} J^2 \overline{\mathcal{F}(\partial_j f)} \mathcal{F}(\partial_j f) d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^3} -i\, m_j \overline{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(\partial_j f) d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}\Big(-i\, m_j \overline{\mathcal{F}(f)}\Big) \partial_j f d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\mathcal{F}^{-1}\Big(i\, m_j \mathcal{F}(f)\Big)} \partial_j f d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} T_j(f) \partial_j f d\xi.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo termine abbiamo posto

$$T_j(f) := \mathcal{F}^{-1}\Big(i\, m_j \mathcal{F}(f)\Big).$$

È facile verificare che $T_j(f) = \overline{T_j(f)}$. Da (1.3) si ottiene

$$\partial_j = X_j - a_j \partial_3, \quad \text{se} \quad j = 1, 2.$$

D'altra parte

$$\partial_3 = \frac{1}{q}[X_1, X_2] = \frac{1}{q}(X_1 X_2 - X_2 X_1).$$

Utilizzando questa identità nell'ultimo termine di (3.2), quando $j = 1, 2$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} T_j f \partial_j f &= \int_{\mathbb{R}^3} T_j f X_j f - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{a_j}{q} T_j f (X_1 X_2 - X_2 X_1) f \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} T_j f X_j f - \int_{\mathbb{R}^3} X_1^* \Big(\frac{a_j}{q} T_j f\Big) X_2 f + \int_{\mathbb{R}^3} X_2^* \Big(\frac{a_j}{q} T_j f\Big) X_1 f,\end{aligned}$$

mentre, quando $j = 3$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} T_j f \partial_j f &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{q} T_j f (X_1 X_2 - X_2 X_1) f \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} X_1^* \Big(\frac{1}{q} T_j f\Big) X_2 f - \int_{\mathbb{R}^3} X_2^* \Big(\frac{1}{q} T_j f\Big) X_1 f.\end{aligned}$$

La funzione m_j in (3.1) soddisfa la condizione (2.1) e quindi T_j è un operatore di Calderon–Zygmund. Pertanto

$$|\int_{\mathbb{R}^3} T_j f X_j f| \leq ||T_j f||_2 ||X_j f||_2 \leq C ||f||_2 ||X_j f||_2. \tag{3.2}$$

Il Corollario 2.1 consente di stimare

$$\int_{\mathbb{R}^3} X_k^* (\alpha_j T_j f) X_h f$$

con $\alpha_j = \frac{a_j}{q}$ oppure $\alpha_j = \frac{1}{q}$ e $k, h = 1, 2$. Infatti, poichè

$$\begin{aligned}X_k^*(\alpha_j T_j f) &= X_k^*(\alpha_j) T_j f - \alpha_j X_k T_j f \\ &= X_k^*(\alpha_j) T_j f - \alpha_j T_j X_k f - \alpha_j [X_k, T_j] f \\ &= X_k^*(\alpha_j) T_j f - \alpha_j T_j X_k f - \alpha_j [a_k \partial_k, T_j] f,\end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}|\int_{\mathbb{R}^3} X_k^*(\alpha_j T_j f) X_h f| &\leq ||X_k^*(\alpha_j)||_6 ||T_j f||_3 ||X_h f||_2 + ||\alpha_j||_\infty ||T_j(X_k f)||_2 ||X_h f||_2 \\ &\quad + ||\alpha_j||_\infty ||[a_k \partial_k, T_j] f||_2 ||X_h f||_2.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}||X_k^*\Big(\frac{1}{q}\Big)||_6 &\leq ||X_k\Big(\frac{1}{q}\Big)||_6 + ||\frac{1}{q} \partial_3 a_k||_6 \\ &\leq ||X_k\Big(\frac{1}{q}\Big)||_6 + ||\frac{1}{q}||_\infty ||\partial_3 a||_6\end{aligned}$$

e

$$||X_k^*\Big(\frac{a_j}{q}\Big)||_6 \leq ||a_j X_k^*\Big(\frac{1}{q}\Big)||_6 + ||\frac{1}{q}X_k a_j||_6$$
$$\leq ||a_j||_\infty ||X_k^*\Big(\frac{1}{q}\Big)||_6 + ||\frac{1}{q}||_\infty\Big(||\partial_k a_j||_6 + ||a||_\infty ||\partial_k a_j||_6\Big).$$

Allora, grazie alle immersioni classiche, $H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \subseteq H^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subseteq L^6(\mathbb{R}^3)$ e $H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^3)$, otteniamo la seguente stima:

$$||X_k^*(\alpha_j)||_6 \leq C(M), \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.3}$$

Poichè T_j è un operatore di Calderon–Zigmund abbiamo anche

$$||T_j f||_3 \leq C||f||_3, \quad ||T_j(X_k f)||_2 \leq C||X_k f||_2. \tag{3.4}$$

Infine, per il Corollario 2.1,

$$||[a_k\partial_k, T_j]f||_2 \leq C||a||_{2,2}||f||_3. \tag{3.5}$$

Raccogliendo, da (3.2)-(3.5) otteniamo

$$||f||_{1/2,2}^2 \leq C(M)(||f||_2 + ||f||_3)\sum_{j=1}^{2}||X_j f||_2 + ||f||_2^2. \tag{3.6}$$

Ricordando la classica immersione di Sobolev $H^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^3) \subseteq L^3(\mathbb{R}^3)$ e la ovvia stima $||f||_2 \leq ||f||_{1/2,2}$, da (3.6) si ottiene

$$||f||_{\frac{1}{2},2}^2 \leq C(M)\Big(||f||_{1/2,2}\sum_{j=1}^{2}||X_j f||_2\Big) + ||f||_2^2$$
$$\leq \frac{1}{2}||f||_{1/2,2}^2 + 2C^2(M)\Big(\sum_{j=1}^{2}||X_j f||_2\Big)^2 + ||f||_2^2.$$

La disuguaglianza (1.11) segue immediatamente da queste stime.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[CC95] X. Cabrè and L. Caffarelli. *Fully nonlinear Elliptic Equations.* Amer. Math. Soc., 1995.

[Cit98] G. Citti. Regularity of solutions to the Levi equation. *Analyse non Line'aire, Annales del l'H.I.P*, 15:5175–5346, 1998.

[CLM99] G. Citti, E. Lanconelli, and A. Montanari. On the smoothness of viscosity solutions of the prescribed Levi-curvature equation. *Atti Accad. Naz. Lincei*, pages 1–10, 1999. To appear.

[LM98] E. Lanconelli and D. Morbidelli. On the Poincarè inequality for vector fields, 1998. Dipartimento di Matematica, Univ. di Bologna.

[OR73] O. Oleinik and O. V. Radkewitch. *Second order equations with nonnegative chacteristic form.* Amer. Math. Soc., 1973.

[Ste93] E. M. Stein. *Harmonic Analysis.* Princeton Univ. Press, 1993.